XXX
Межрегиональная олимпиада школьников им. И.Я. Верченко по математике и криптографии

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2021

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех групп часовых поясов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса. Тематика отдельных задач в разных классах пересекается, при этом младшим классам предлагались более легкие варианты заданий.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое в 198 раз больше суммы своих цифр. Решение обоснуйте.

2. На координатной прямой отмечены 5 точек с координатами $2; 25; -5; 8; 9$. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 5 точек минимальна. Ответ обоснуйте.

3. Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4, в каждую ячейку которой записана одна из цифр 0, 1, 2. При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?

1	1	2	2
2	1	1	2
0	0	1	2
0	1	2	0

4. На границе Криптоландии установлена пропускная система, имеющая 17 входов и 17 выходов (входы перед границей, выходы – уже в Криптоландии). Входы и выходы занумерованы независимо друг от друга числами от 1 до 17, причем в неизвестном для посетителей Криптоландии порядке. От каждого входа проложен один «прямой» туннель к одному из выходов, причем от разных входов – к разным выходам. От каждого выхода проложен один «обратный» туннель ко входу с тем же номером, что у этого выхода. Посетитель сам выбирает один из входов. Войдя в него, он попадает в лифт, в котором есть 2 кнопки: зеленая – «ехать», красная – «выходить». Система работает следующим образом. Посетитель, находясь в лифте около входа, нажимает зеленую кнопку, лифт по прямому туннелю доставляет его к соответствующему выходу. Находясь в лифте около выхода, посетитель может: 1) нажать зеленую кнопку, и тогда лифт по обратному туннелю доставит его ко входу с тем же номером; 2) нажать красную кнопку, и тогда выход откроется, но только если его номер совпадает с номером того входа, через который посетитель вошел первоначально. В противном случае (при несовпадении номеров) посетитель будет удалён за пределы Криптоландии и сможет воспользоваться правом посещения только через год. Алиса решила провести каникулы в Криптоландии. При этом ей стала известна схема прямых туннелей системы пропуска:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
13	10	7	6	3	11	2	16	4	5	1	15	14	9	17	8	12

Здесь верхнее число является номером входа, а стоящее под ним число – номером того выхода, к которому ведет прямой туннель. За какое минимальное число поездок по туннелям Алиса сможет гарантированно попасть в Криптоландию? Ответ обоснуйте.

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по таблице. Затем выбирали четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i$, $z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i. Потом по формулам $z_i' = r_{32}(z_i), i = 1, \ldots, n$ получили числа $z_1', \ldots, z_n'$ (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ЗЪЦЫФМ**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **Г**.

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 5$). Поданный на вход набор $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(\boldsymbol{x}) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \ldots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(\boldsymbol{x})$ на вход, получим на выходе набор $h(h(\boldsymbol{x})) = h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, который вновь подадим на вход и получим $h^{(3)}(\boldsymbol{x})$ и т.д. Докажите, что если все наборы $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \ldots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим $\boldsymbol{x}$ – искомое число**,** $\boldsymbol{s}$ – сумма его цифр. Тогда $\boldsymbol{x = 198 \cdot s}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ делится нацело на 9. По признаку делимости на 9, число $\boldsymbol{s}$ делится на 9. Так как искомое число четырёхзначное, то для $\boldsymbol{s}$ возможны 4 варианта: $\boldsymbol{s = 9}, \boldsymbol{s = 18}, \boldsymbol{s = 27}, \boldsymbol{s = 36}$. Для каждого $\boldsymbol{s}$, соответственно, находим: $\boldsymbol{x = 1782}, \boldsymbol{x = 3564}, \boldsymbol{x = 5346}, \boldsymbol{x = 7128}$. Подходящее: $\boldsymbol{x = 3564}$.

ОТВЕТ: 3564.

Задача 2

Расположим числа в порядке возрастания: $-5; 2; \mathbf{8}; 9; 25$. Покажем, что выделенное среднее число **8** является искомым. Обозначим $s(y)$ - сумма расстояний от числа y до остальных чисел. Рассмотрим число $y = 8 + x$. Если $x \in (0; 1)$, то сумма расстояний от y до первых четырех чисел увеличится на $2x$, а до последних четырех – уменьшится на $2x$ (по сравнению с числом 8), и при этом до самого числа 8 расстояние равно x, то есть $s(y) = s(8) + x$. Если $x = 1$, то есть $y = 9$, то сумма расстояний от y до всех чисел будет равна $s + 1$. Рассуждая аналогично при $x \in (1; +\infty)$, получим вывод: минимальное значение $s(y)$ достигается при $y = 8$. При отрицательных значениях x рассуждения ничем не отличаются.

ОТВЕТ: 8**.**

Задача 3

Указанную в условии таблицу 4×4, можно построить следующим образом: положим элементы верхнего левого угла размеров 3×3, произвольным образом, после чего заметим, что все оставшиеся элементы определяются однозначно из линейных (по модулю 3) соотношений для строк и столбцов (при этом элемент в правом нижнем углу будет равен сумме по модулю 3 всех остальных элементов квадрата). Плюс к этому имеем два линейных соотношения для элементов диагоналей. Таким образом, общее число независимого выбора переменных $a_{i,j}, i, j = 1,2,3$ равно 7. Следовательно, общее число ключей равно $3^7 = 2187$.

ОТВЕТ: 2187.

Задача 4

Если для начала движения выбран вход с номером 1, то далее перемещение по циклу 1-13-14-9-4-6-11. Для входа с номером 2: 2-10-5-3-7. Для входа с номером 8: 8-16. Последний цикл 12-15-17. Если бы был известен начальный номер входа, то решение сводилось бы к выбору нужного числа поездок по прямым туннелям из множества чисел $\{7,5,2,3\}$. Но поскольку этот номера неизвестен, то необходимо совершить НОК$\{7,5,2,3\} = 210$ поездок.

ОТВЕТ: 210.

Задача 5

Рассмотрим произвольную букву открытого и шифрованного текстов. Для соответствующих им (по таблице) чисел x и z' выполняются равенства $x = y + pz$ и $z = y + qx$, при некотором y, p и q. При этом по условию $z' = r_{32}(z)$. Используя свойство сравнений по модулю целого числа, получим: $x - z' = pz' - qx(mod\ 32)$ или $x(1+q) = z'(1+p)(mod\ 32)$.

Для дальнейшего решения будем пользоваться следующим свойством: если наибольший общий делитель чисел a и n равен 1, то сравнение $x = y(mod\ n)$ равносильно $ax = ay(mod\ n)$. Используя условие задачи для первой буквы открытого и шифрованного текста, получим равенство $3(1+q) = 7(1+p)(mod\ 32)$. Заметим, что $7 \cdot 5 = 3(mod\ 32)$. Тогда $3 \cdot 5 \cdot (1+q) = 7 \cdot 5 \cdot (1+p)(mod\ 32)$, что равносильно равенству $5 \cdot (1+q) = (1+p)(mod\ 32)$. Значит, $x(1+q) = 5(1+q)z'(mod\ 32)$. В итоге получаем, что $x = 5z'(mod\ 32)$. Остается воспользоваться полученным соотношением для остальных букв. Получится слово **ГВОЗДЬ**.

Ответ: ГВОЗДЬ.

Задача 6

Заметим, что для всех $\boldsymbol{x}$ вектор $h(\boldsymbol{x})$ содержит четное число единиц, так как

$$(x_1 \oplus x_{n-1}) \oplus (x_2 \oplus x_n) \oplus (x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus x_4) \oplus \dots, \oplus (x_{n-2} \oplus x_{n-1}) \oplus (x_1 \oplus x_n) = 0.$$

Значит в рассматриваемой последовательности $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ (1) все векторы, начиная со второго, имеют четное количество единиц. Количество всех векторов, имеющих четное количество единиц, равно 2^{n-1}. Поэтому претендентом на самое большое количество различных векторов является последовательность (1), начинающаяся с вектора, содержащего нечетное количество единиц и продолжающаяся всеми векторами с четным количеством единиц. Количество векторов в такой последовательности будет $1 + 2^{n-1}$ Таким образом $k \leq 2^{n-1}$.

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое в 198 раз больше суммы своих цифр. Решение обоснуйте.
2. На координатной прямой отмечены 5 точек с координатами $2; 25; -5; 8; 9$. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 5 точек минимальна. Ответ обоснуйте.

3. Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4, в каждую ячейку которой записана одна из цифр 0, 1, 2. При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?

1	1	2	2
2	1	1	2
0	0	1	2
0	1	2	0

4. На границе Криптоландии установлена пропускная система, имеющая 17 входов и 17 выходов (входы перед границей, выходы – уже в Криптоландии). Входы и выходы занумерованы независимо друг от друга числами от 1 до 17, причем в неизвестном для посетителей Криптоландии порядке. От каждого входа проложен один «прямой» туннель к одному из выходов, причем от разных входов – к разным выходам. От каждого выхода проложен один «обратный» туннель ко входу с тем же номером, что у этого выхода. Посетитель сам выбирает один из входов. Войдя в него, он попадает в лифт, в котором есть 2 кнопки: зеленая – «ехать», красная – «выходить». Система работает следующим образом. Посетитель, находясь в лифте около входа, нажимает зеленую кнопку, лифт по прямому туннелю доставляет его к соответствующему выходу. Находясь в лифте около выхода, посетитель может: 1) нажать зеленую кнопку, и тогда лифт по обратному туннелю доставит его ко входу с тем же номером; 2) нажать красную кнопку, и тогда выход откроется, но только если его номер совпадает с номером того входа, через который посетитель вошел первоначально. В противном случае (при несовпадении номеров) посетитель будет удалён за пределы Криптоландии и сможет воспользоваться правом посещения только через год. Алиса решила провести каникулы в Криптоландии. При этом ей стала известна схема прямых туннелей системы пропуска:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	11	10	12	18	1	4	7	17	8	5	19	6	3	13	9	16	2	14	15

Здесь верхнее число является номером входа, а стоящее под ним число – номером того выхода, к которому ведет прямой туннель. За какое минимальное число поездок по туннелям Алиса сможет гарантированно попасть в Криптоландию? Ответ обоснуйте.

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами $x_1, x_2, \dots, x_n$ по таблице. Затем выбирали четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i$, $z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i. Потом по формулам $z_i' = r_{32}(z_i), i = 1, \dots, n$ получили числа $z_1', \dots, z_n'$ (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ХСКИЩА**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **Щ**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 5$). Поданный на вход набор $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(\boldsymbol{x}) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \dots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(\boldsymbol{x})$ на вход, получим на выходе набор $h\big(h(\boldsymbol{x})\big) = h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, который вновь подадим на вход и получим $h^{(3)}(\boldsymbol{x})$ и т.д. Докажите, что если все наборы $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \ldots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим $\boldsymbol{x}$ – искомое число**,** $\boldsymbol{s}$ – сумма его цифр. Тогда $\boldsymbol{x} = \mathbf{198} \cdot \boldsymbol{s}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ делится нацело на 9. По признаку делимости на 9, число $\boldsymbol{s}$ делится на 9. Так как искомое число четырёхзначное, то для $\boldsymbol{s}$ возможны 4 варианта: $\boldsymbol{s} = \mathbf{9}, \boldsymbol{s} = \mathbf{18}, \boldsymbol{s} = \mathbf{27}, \boldsymbol{s} = \mathbf{36}$. Для каждого $\boldsymbol{s}$, соответственно, находим: $\boldsymbol{x} = \mathbf{1782}, \boldsymbol{x} = \mathbf{3564}, \boldsymbol{x} = \mathbf{5346}, \boldsymbol{x} = \mathbf{7128}$**.** Подходящее: $\boldsymbol{x} = \mathbf{3564}$.

ОТВЕТ: 3564.

Задача 2

Расположим числа в порядке возрастания: $-5; 2; \mathbf{8}; 9; 25$. Покажем, что выделенное среднее число **8** является искомым. Обозначим $s(y)$ - сумма расстояний от числа y до остальных чисел. Рассмотрим число $y = 8 + x$. Если $x \in (0; 1)$, то сумма расстояний от y до первых четырех чисел увеличится на $2x$, а до последних четырех – уменьшится на $2x$ (по сравнению с числом 8), и при этом до самого числа 8 расстояние равно x, то есть $s(y) = s(8) + x$. Если $x = 1$, то есть $y = 9$, то сумма расстояний от y до всех чисел будет равна $s + 1$. Рассуждая аналогично при $x \in (1; +\infty)$, получим вывод: минимальное значение $s(y)$ достигается при $y = 8$. При отрицательных значениях x рассуждения ничем не отличаются.

ОТВЕТ: 8**.**

Задача 3

Указанную в условии таблицу 4×4, можно построить следующим образом: положим элементы верхнего левого угла размеров 3×3, произвольным образом, после чего заметим, что все оставшиеся элементы определяются однозначно из линейных (по модулю 3) соотношений для строк и столбцов (при этом элемент в правом нижнем углу будет равен сумме по модулю 3 всех остальных элементов квадрата). Плюс к этому имеем два линейных соотношения для элементов диагоналей. Таким образом, общее число независимого выбора переменных $a_{i,j}, i, j = 1,2,3$ равно 7. Следовательно, общее число ключей равно $3^7 = 2187$**.**

ОТВЕТ: 2187.

Задача 4

Если для начала движения выбран вход с номером 1, то далее перемещение по циклу 1-20-15-13-6. Для входа с номером 2: 2-11-5-18. Для входа с номером 3: 3-10-8-7-4-12-19-14. Последний цикл 9-17-16. Если бы был известен начальный номер входа, то решение сводилось бы к выбору нужного числа поездок по прямым туннелям из множества чисел {5,4,8,3}. Но поскольку этот номера неизвестен, то необходимо совершить НОК{5,4,8,3} = 120 поездок.

ОТВЕТ: 120.

Задача 5

Рассмотрим произвольную букву открытого и шифрованного текстов. Для соответствующих им (по таблице) чисел x и z' выполняются равенства $x = y + pz$ и $z = y + qx$, при некотором y, p и q. При этом по условию $z' = r_{32}(z)$. Используя свойство сравнений по модулю целого числа, получим: $x - z' = pz' - qx(mod\ 32)$ или $x(1+q) = z'(1+p)(mod\ 32)$.

Для дальнейшего решения будем пользоваться следующим свойством: если наибольший общий делитель чисел a и n равен 1, то сравнение $x = y(mod\ n)$ равносильно $ax = ay(mod\ n)$. Используя условие задачи для первой буквы открытого и шифрованного текста, получим равенство $25(1+q) = 21(1+p)(mod\ 32)$. Заметим, что $21 \cdot 21 = 25(mod\ 32)$. Тогда $25 \cdot 21 \cdot (1+q) = 21 \cdot 21 \cdot (1+p)(mod\ 32)$, что равносильно равенству $21 \cdot (1+q) = (1+p)(mod\ 32)$. Значит, $x(1+q) = 21(1+q)z'(mod\ 32)$. В итоге получаем, что $x = 21z'(mod\ 32)$. Остается воспользоваться полученным соотношением для остальных букв. Получится слово **ЩЕТИНА**.

ОТВЕТ: ЩЕТИНА.

Задача 6

Заметим, что для всех $\boldsymbol{x}$ вектор $h(\boldsymbol{x})$ содержит четное число единиц, так как

$$(x_1 \oplus x_{n-1}) \oplus (x_2 \oplus x_n) \oplus (x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus x_4) \oplus \dots, \oplus (x_{n-2} \oplus x_{n-1}) \oplus (x_1 \oplus x_n) = 0.$$

Значит в рассматриваемой последовательности $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ (1) все векторы, начиная со второго, имеют четное количество единиц. Количество всех векторов, имеющих четное количество единиц, равно 2^{n-1}. Поэтому претендентом на самое большое количество различных векторов является последовательность (1), начинающаяся с вектора, содержащего нечетное количество единиц и продолжающаяся всеми векторами с четным количеством единиц. Количество векторов в такой последовательности будет $1 + 2^{n-1}$ Таким образом $k \le 2^{n-1}$.

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите наибольшее пятизначное число, которое в 51 раз больше квадрата суммы своих цифр. Решение обоснуйте.
2. На координатной прямой отмечены 9 точек с координатами $2; 25; 7; -3; 12; 19; -5; 8; 9$. Найдите координату точки, сумма расстояний от которой до указанных 9 точек минимальна. Ответ обоснуйте.
3. Ключом шифрсистемы служит таблица 4×4, в каждую ячейку которой записана одна из цифр 0, 1, 2. При этом должны делиться на 3 сумма цифр в каждой строке, сумма цифр в каждом столбце, а также суммы цифр на каждой из двух диагоналей, отмеченных пунктиром. На рисунке приведен один из возможных вариантов ключа. Сколько существует всего различных ключей?

1	1	2	2
2	1	1	2
0	0	1	2
0	1	2	0

4. Целое число $s \in \{0, \dots, 30\}$ может быть преобразовано следующим образом. Пусть, например, $s = 9$. Представим его в двоичной системе счисления *пятизначным* числом: $s = 9 = 01001_2$. Теперь выберем какое-нибудь целое число $c \ge 0$ и сдвинем получившуюся строку 01001 циклически на c позиций влево. Например, при $c = 1$ получится строка 10010, представляющая собой двоичную запись числа 18. Значит, сдвигом на одну позицию из числа 9 получается число 18; будем это записывать так: $9 \lll 1 = 18$. (Если

01001 сдвинуть влево на две позиции, то получится 00101, то есть $9 \lll 2 = 5$.) Итак, $s \lll c$ – это число, получившееся сдвигом числа s на c позиций влево.
Для зашифрования осмысленного слова выбирается секретный ключ – набор из 64 чисел $k_1, \dots, k_{32} \in \{0, \dots, 30\}$ и $c_1, \dots, c_{32} \in \{0,1,2,3\}$. Затем с каждой буквой слова (по отдельности) проделывается следующее. Букву заменяют числом a по таблице и последовательно вычисляют $a_1 = (a + k_1) \lll c_1,\ a_2 = (a_1 + k_2) \lll c_2, \dots, a_{32} = (a_{31} + k_{32}) \lll c_{32}$. Исходную букву затем заменяют на букву, соответствующую числу a_{32}. (Если в процессе вычислений получается число, превышающее 30, то оно заменяется остатком от деления на 31. Так, сумму $20 + 17$ сдедует заменить на 6.)
В результате зашифрования получился набор букв **ЯГКЫНИ**. Найдите исходное слово, если известно, что при зашифровании на этом ключе буква **Ъ** переходит в букву **Ь**, а буква **П** – в **Е**.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы заменили числами $x_1, x_2, \dots, x_n$ по таблице. Затем выбирали четные натуральные числа p и q и для каждого числа x_i из соотношений $x_i = y_i + pz_i$, $z_i = y_i + qx_i$ нашли целые числа y_i и z_i. Потом по формулам $z_i' = r_{32}(z_i), i = 1, \dots, n$ получили числа $z_1', \dots, z_n'$ (где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32), которые вновь заменили буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **ЖЯЮЦКР**. Найдите исходное слово, если известно, что оно начинается на букву **В**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Устройство принимает на вход и выдает на выход наборы из n битов (причем $n \geq 4$). Поданный на вход набор $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в выходной набор $h(\boldsymbol{x}) = (x_1 \oplus x_{n-1}, x_2 \oplus x_n, x_2 \oplus x_3, x_3 \oplus x_4, \dots, x_{n-2} \oplus x_{n-1}, x_1 \oplus x_n)$, где $\oplus$ – стандартная операция сложения битов: $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$. Подав теперь этот набор $h(\boldsymbol{x})$ на вход, получим на выходе набор $h\big(h(\boldsymbol{x})\big) = h^{(2)}(\boldsymbol{x})$, который вновь подадим на вход и получим $h^{(3)}(\boldsymbol{x})$ и т.д. Докажите, что если все наборы $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ оказались различными, то $k \leq 2^{n-1} - 1$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Обозначим $\boldsymbol{x}$ – искомое число, $\boldsymbol{s}$ – сумма его цифр. Тогда $\boldsymbol{x = 3 \cdot 17 \cdot s^2}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ делится нацело на 3. По признаку делимости на 3, число $\boldsymbol{s}$ делится на 3. Но тогда $\boldsymbol{x}$ делится на 9. По признаку делимости на 9, $\boldsymbol{s}$ делится на 9. Так как искомое число пятизначное, то для $\boldsymbol{s}$ возможны 5 вариантов: $\boldsymbol{s = 9, s = 18, s = 27, s = 36, s = 45}$. Для каждого $\boldsymbol{s}$, соответственно, находим: $\boldsymbol{x = 4131, x = 16524, x = 37179, x = 66096, x = 103275}$. Первое и последнее – не пятизначные, у четвертого сумма цифр не равна 36. Подходящие: $\boldsymbol{x = 16524, x = 37179}$.
ОТВЕТ: 37179.

Задача 2

Расположим числа в порядке возрастания: $-5; -3; 2; 7;$ **8**$; 9; 12; 19; 25$. Покажем, что выделенное среднее число **8** является искомым. Обозначим $s(y)$ - сумма расстояний от числа y до остальных чисел. Рассмотрим число $y = 8 + x$. Если $x \in (0; 1)$, то сумма расстояний от y до первых четырех чисел увеличится на $4x$, а до последних четырех –

уменьшится на $4x$ (по сравнению с числом 8), и при этом до самого числа 8 расстояние равно x, то есть $s(y) = s(8) + x$. Если $x = 1$, то есть $y = 9$, то сумма расстояний от y до всех чисел будет равна $s + 1$. Рассуждая аналогично при $x \in (1; +\infty)$, получим вывод: минимальное значение $s(y)$ достигается при $y = 8$. При отрицательных значениях x рассуждения ничем не отличаются.

ОТВЕТ: 8.

Задача 3

Указанную в условии таблицу 4×4, можно построить следующим образом: положим элементы верхнего левого угла размеров 3×3, произвольным образом, после чего заметим, что все оставшиеся элементы определяются однозначно из линейных (по модулю 3) соотношений для строк и столбцов (при этом элемент в правом нижнем углу будет равен сумме по модулю 3 всех остальных элементов квадрата). Плюс к этому имеем два линейных соотношения для элементов диагоналей. Таким образом, общее число независимого выбора переменных $a_{i,j}, i, j = 1,2,3$ равно 7. Следовательно, общее число ключей равно $3^7 = 2187$.

ОТВЕТ: 2187.

Задача 4

Покажем, что $(s \lll c) = r_{31}(s \cdot 2^c)$ (*)

Заметим, что достаточно доказать для $c = 1$.

Пусть $s = (s_4 s_3 s_2 s_1 s_0)_2$. Если $s_4 = 0$, то равенство (*) очевидно.

Если $s_4 = 1$, то $s = 16 + 2^3 \cdot s_3 + 2^2 \cdot s_2 + 2 \cdot s_1 + s_0$.

Тогда $r_{31}(s \cdot 2) = 2^4 \cdot s_3 + 2^3 \cdot s_2 + 2^2 \cdot s_1 + 2 \cdot s_0 + 1 = (s \lll c)$, и равенство (*) доказано.

Следовательно,

$a_1 = \big((a + k_1) \lll c_1\big) = r_{31}\big((a + k_1) \cdot 2^{c_1}\big) = r_{31}(a \cdot 2^{c_1} + k_1 \cdot 2^{c_1})$ (1)

То есть, на одном шаге шифрования - линейное преобразование числа a по правилу (1). Так как композиция линейных преобразований есть линейное преобразование, то $a_{32} = (a \cdot x + k)$, где x и k – неизвестные.

Воспользуемся тем, что на этом ключе буква **Ъ** переходит в букву **Ь**, а буква **П** – в **Е**:

$27 = (25 \cdot x + k)$, $5 = (14 \cdot x + k)$ (по модулю 31).

Вычитая из первого равенства второе, получим: $22 = 11 \cdot x$. Отсюда $x = 2$. Тогда $27 = (25 \cdot 2 + k)$ (по модулю 31) и, следовательно, $k = 8$. Окончательно получили:

$a_{32} = (a \cdot 2 + 8)$. Тогда $a = 2^{-1}(a_{32} - 8) = 16 \cdot a_{32} + 27$ (можно было сразу решать уравнение $a = (a_{32} \cdot x + k)$). Последовательно подставляя буквы шифрованного текста ЯГКЫНИ получим исходное слово МОСКВА.

ОТВЕТ: МОСКВА.

Задача 5

Рассмотрим произвольную букву открытого и шифрованного текстов. Для соответствующих им (по таблице) чисел x и z' выполняются равенства $x = y + pz$ и $z = y + qx$, при некотором y, p и q. При этом по условию $z' = r_{32}(z)$. Используя свойство сравнений по модулю целого числа, получим: $x - z' = pz' - qx (mod\, 32)$ или $x(1 + q) = z'(1 + p)(mod\, 32)$.

Для дальнейшего решения будем пользоваться следующим свойством: если наибольший общий делитель чисел a и n равен 1, то сравнение $x = y(mod\, n)$ равносильно $ax = ay(mod\, n)$. Используя условие задачи для первой буквы открытого и шифрованного текста, получим равенство $2(1 + q) = 6(1 + p)(mod\, 32)$.

Заметим, что сравнение $6t = 2(mod\, 32)$ имеет 2 решения по модулю 32: $t = 11(mod\, 32)$, $t = 27(mod\, 32)$. Тогда получим, что $11 \cdot (1 + q) = (1 + p)(mod\, 32)$ или $27 \cdot (1 + q) =$

$(1+p)(mod\,32)$ для каждого t. Таким образом, $x = 11z'(mod\,32)$ или $x = 27z'(mod\,32)$ соответственно.

Остается воспользоваться полученными соотношениями для остальных букв. Осмысленное слово получается только при втором варианте. А значит, исходное слово **ВЕКТОР**.

ОТВЕТ: ВЕКТОР.

Задача 6

Заметим, что для всех $\boldsymbol{x}$ вектор $h(\boldsymbol{x})$ содержит четное число единиц, так как

$$(x_1 \oplus x_{n-1}) \oplus (x_2 \oplus x_n) \oplus (x_2 \oplus x_3) \oplus (x_3 \oplus x_4) \oplus \dots, \oplus (x_{n-2} \oplus x_{n-1}) \oplus (x_1 \oplus x_n) = 0.$$

Значит в рассматриваемой последовательности $\boldsymbol{x}, h(\boldsymbol{x}), h^{(2)}(\boldsymbol{x}), \dots, h^{(k)}(\boldsymbol{x})$ (1) все векторы, начиная со второго, имеют четное количество единиц. Количество всех векторов, имеющих четное количество единиц, равно 2^{n-1}. Поэтому претендентом на самое большое количество различных векторов является последовательность (1), начинающаяся с вектора, содержащего нечетное количество единиц и продолжающаяся всеми векторами с четным количеством единиц. Количество векторов в такой последовательности будет $1 + 2^{n-1}$ Таким образом $k \le 2^{n-1}$. Для получения оценки $k \le 2^{n-1} - 1$ рассмотрим отдельно случай когда среди векторов последовательности (1) нет нулевого вектора $(0,0,\dots,0)$ и когда он есть. Если в последовательности (1) нет вектора $(0,0,\dots,0)$, то она содержит не более $1 + (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$ векторов и $k \le 2^{n-1} - 1$. Пусть теперь последовательность (1) содержит вектор $(0,0,\dots,0)$. Рассмотрим два случая.

1) Если n - нечетное число, то $h(0,0,\dots,0) = h(1,1,\dots,1) = (0,0,\dots,0)$ и других векторов, переходящих в нулевой нет. При этом не существует векторов $\boldsymbol{z}$ таких, что $h(\boldsymbol{z}) = (1,1,\dots,1)$ Таким образом в этом случае последовательность (1) содержит максимум два вектора и $k \le 2^{n-1} - 1$.

2) Если n - четное число, то $h(0,0,\dots,0) = h(1,1,\dots,1) = (0,0,\dots,0)$ и найдутся два вектора

$$\boldsymbol{a} = (0,0,1,0,1,\dots,0,1,1) \text{ и } \boldsymbol{b} = (1,1,0,1,0,1,\dots,0,1,0,0)$$

содержащие четное число единиц такие, что $h(\boldsymbol{a}) = h(\boldsymbol{b}) = (1,1,\dots,1)$. Последовательность (1) не может содержать одновременно векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому в этом случае она содержит не более $1 + (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$ векторов и $k \le 2^{n-1} - 1$.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

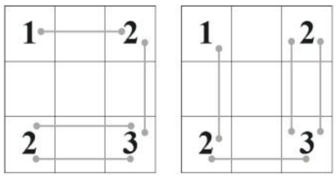
9 КЛАСС

1. На билетах в кинотеатры Криптоландии проставляется шестизначный номер от $(0,0,0,0,0,0)$ до $(7,7,7,7,7,7)$. При этом используются только цифры $0,1,2,3,4,5,6,7,7$.

Билет считается «счастливым», если остатки от деления на 8 суммы первых трех цифр и суммы последних трех цифр отличаются на фиксированное число $k = 1$. Например, билеты с номерами 123025 и 123779 – счастливые, а с номерами 123000 и 876111 – нет. Найдите число счастливых билетов.

2. Известно, что p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, причем $p_1 < p_2$ и $p_3^2 = p_1 \cdot p_2 + 16$. Найдите сумму всех таких чисел p_1, p_2, p_3.

3. Сообщение передается в виде таблицы 7×7 клеток. В каждой клетке записана либо буква, либо цифра. Чтобы прочитать сообщение, необходимо зачеркнуть отрезками лишние символы. Отрезки проводят по следующим правилам (см. примеры): 1) концы отрезков лежат только в клетках с цифрами, причем цифра показывает сколько концов в этой клетке лежит, 2) отрезки могут проходить только горизонтально или вертикально, 3) две цифры могут быть соединены не более, чем двумя отрезками. Прочитайте сообщение, которое получается выписыванием каждой третьей незачеркнутой буквы, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.



2	в	**2**	а	**6**	е	**3**
в	г	у	е	а	л	а
и	о	ч	ж	и	о	с
с	е	**2**	н	**4**	ц	**4**
т	е	е	т	р	м	щ
ч	с	з	о	а	е	р
4	х	**4**	т	**1**	м	**2**

4. Для зашифрования сообщении каждая его буква заменяется числом по таблице (внизу страницы). В результате получается числовая последовательность $x_1, \ldots, x_n$. Затем вырабатывают последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ по следующему правилу: γ_1 – некоторое натуральное число, γ_2 – сумма цифр квадрата γ_1, увеличенная на 1, и т.д. Например, если $\gamma_1 = 7$, то $\gamma_2 = 14$, $\gamma_3 = 17$ и т.д. После этого выбирается некоторое натуральное t и формируется зашифрованное сообщение по правилу: $r_{32}(x_1 + \gamma_t), \ldots, r_{32}(x_n + \gamma_{t+n-1})$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Известно, что для $\gamma_1 = 1058$ и некоторого t получился следующий шифртекст: 23, 25, 14, 12, 16, 17, 11, 30, 16, 7, 29, 1. Восстановите исходное сообщение, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре и без пробелов, то есть если у Вас получился ответ **олимпиада по криптографии**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДАПОКРИПТОГРАФИИ**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по таблице (внизу страницы). Затем выбирают натуральные числа x_0 и k. Далее число x_0 приписывают в начало последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$, а число $x_{n+1} = x_0 + 11^n$ (где n – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ (где $x_{n+1} = x_0 + 11^n$) затем преобразуется в последовательность $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$ по формуле

$$y_i = r_{32}(x_i + 2x_i \cdot k + k), \qquad i = 0, \dots, n+1,$$

где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем числа $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ заменяют буквами согласно таблице. В результате получилось вот что: **ЙЫЯСЯМЯСК**. Восстановите исходное слово, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Для зашифрования осмысленного 14-буквенного слова его буквы переводят в числа по таблице:

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Таким образом из исходного слова получается последовательность чисел $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{13}^{(0)}, x_{14}^{(0)}\right)$. Затем выбираются некоторые числа p, q и генерируются последовательности $x^{(1)}, \dots, x^{(28)}$ (также из 14 чисел) следующим образом:

$$x^{(i)} = \left(x_2^{(i-1)}, \dots, x_{13}^{(i-1)}, r_{32}\left(x_1^{(i-1)} + q \cdot x_{14}^{(i-1)}\right)\right), \text{при } i = 1, \dots, 14,$$

$$x^{(i)} = \left(x_2^{(i-1)}, \dots, x_{13}^{(i-1)}, r_{32}\left(x_1^{(i-1)} + p \cdot x_{14}^{(i-1)}\right)\right), \text{при } i = 15, \dots, 28,$$

где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем формируется последовательность $y_1, y_2, \dots, y_{13}, y_{14}$, где $y_i = x_{14}^{(2i-1)}, i = 1, \dots, 14$. В соответствии с вышеуказанной таблицей каждое y_i переводится в букву и полученное «слово» отправляется. Злоумышленнику удалось перехватить слово: **ЬЛГОЧЖГЩОШСССП**. Восстановите исходное слово, если известно, что $p = 25, q = 9$, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

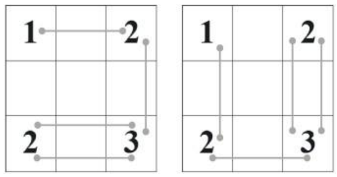
10 КЛАСС

1. На билетах в кинотеатры Криптоландии проставляется шестизначный номер от (0,0,0,0,0,0) до (7,7,7,7,7,7). При этом используются только цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,7.

Билет считается «счастливым», если остатки от деления на 8 суммы первых трех цифр и суммы последних трех цифр отличаются на фиксированное число $k = 1$. Например, билеты с номерами 123025 и 123779 – счастливые, а с номерами 123000 и 876111 – нет. Найдите число счастливых билетов.

2. Известно, что p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, причем $p_1 < p_2$ и $p_3^2 = p_1 \cdot p_2 + 16$. Найдите сумму всех таких чисел p_1, p_2, p_3.

3. Сообщение передается в виде таблицы 7×7 клеток. В каждой клетке записана либо буква, либо цифра. Чтобы прочитать сообщение, необходимо зачеркнуть отрезками лишние



символы. Отрезки проводят по следующим правилам (см. примеры): 1) концы отрезков лежат только в клетках с цифрами, причем цифра показывает сколько концов в этой клетке лежит, 2) отрезки могут проходить только горизонтально или вертикально, 3) две цифры могут быть соединены не более, чем двумя отрезками. Прочитайте сообщение, которое получается выписыванием каждой третьей незачеркнутой буквы, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

2	в	**2**	а	**6**	е	**3**
в	г	у	е	а	л	а
и	о	ч	ж	и	о	с
с	е	**2**	н	**4**	ц	**4**
т	е	е	т	р	м	щ
ч	с	з	о	а	е	р
4	х	**4**	т	**1**	м	**2**

4. Для зашифрования сообщении каждая его буква заменяется числом по таблице (внизу страницы). В результате получается числовая последовательность $x_1, \ldots, x_n$. Затем вырабатывают последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ по следующему правилу: γ_1 – некоторое натуральное число, γ_2 – сумма цифр квадрата γ_1, увеличенная на 1, и т.д. Например, если $\gamma_1 = 7$, то $\gamma_2 = 14$, $\gamma_3 = 17$ и т.д. После этого выбирается некоторое натуральное t и формируется зашифрованное сообщение по правилу: $r_{32}(x_1 + \gamma_t), \ldots, r_{32}(x_n + \gamma_{t+n-1})$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Известно, что для $\gamma_1 = 1058$ и некоторого t получился следующий шифртекст: 23, 25, 14, 12, 16, 17, 11, 30, 16, 7, 29, 1. Восстановите исходное сообщение, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре и без пробелов, то есть если у Вас получился ответ **олимпиада по криптографии**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДАПОКРИПТОГРАФИИ**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

5. Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по таблице (внизу страницы). Затем выбирают натуральные числа x_0 и k. Далее число x_0 приписывают в начало последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а число $x_{n+1} = x_0 + 11^n$ (где n – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ (где $x_{n+1} = x_0 + 11^n$) затем преобразуется в последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ по формуле

$$y_i = r_{32}(x_i + 2x_i \cdot k + k), \qquad i = 0, \ldots, n+1,$$

где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем числа $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ заменяют буквами согласно таблице. В результате получилось вот что: **ЙЫЯСЯМЯСК**. Восстановите исходное слово, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. Для зашифрования осмысленного 14-буквенного слова его буквы переводят в числа по таблице:

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Таким образом из исходного слова получается последовательность чисел $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{13}^{(0)}, x_{14}^{(0)}\right)$. Затем выбираются некоторые числа p, q и генерируются последовательности $x^{(1)}, \dots, x^{(28)}$ (также из 14 чисел) следующим образом:

$$x^{(i)} = \left(x_2^{(i-1)}, \dots, x_{13}^{(i-1)}, r_{32}\left(x_1^{(i-1)} + q \cdot x_{14}^{(i-1)}\right)\right), \text{при } i = 1, \dots, 14,$$

$$x^{(i)} = \left(x_2^{(i-1)}, \dots, x_{13}^{(i-1)}, r_{32}\left(x_1^{(i-1)} + p \cdot x_{14}^{(i-1)}\right)\right), \text{при } i = 15, \dots, 28,$$

где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем формируется последовательность $y_1, y_2, \dots, y_{13}, y_{14}$, где $y_i = x_{14}^{(2i-1)}, i = 1, \dots, 14$. В соответствии с вышеуказанной таблицей каждое y_i переводится в букву и полученное «слово» отправляется. Злоумышленнику удалось перехватить слово: **ЬЛГОЧЖГЩОШСССП**. Восстановите исходное слово, если известно, что $p = 25, q = 9$, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

11 КЛАСС

1. Известно, что p, p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, причем $p_1 < p_2 < p_3$ и $p^3 + 6p^2 - 4p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + 24$. Найдите сумму всех таких чисел p, p_1, p_2, p_3.

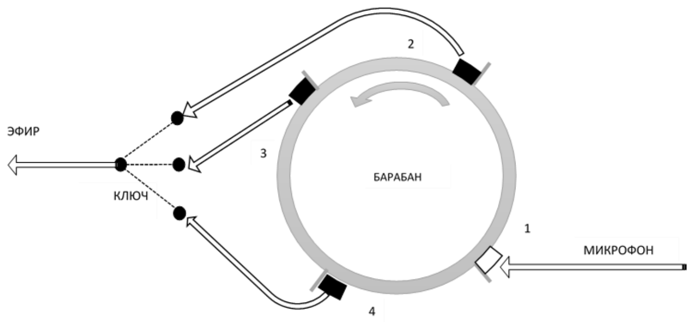
2. Для зашифрования осмысленного слова его буквы переводят в числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ по таблице. Затем выбирают натуральные числа x_0 и k. Далее число x_0 приписывают в начало последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$, а число $x_{n+1} = x_0 + 27^{n+6}$ (где n – длина слова) – в ее конец. Получившаяся в результате последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ затем преобразуется в последовательность $y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$ по формуле $y_i = r_{32}(x_i + 6x_i \cdot k^3 + k)$, $i = 0,1, \dots, n+1$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем числа $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ заменяют буквами согласно таблице. В результате получили вот что: **РМНКНУГУС**. Восстановите исходное слово, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

3. Саша решил отправить Маше записку. Для этого каждую букву сообщения он заменил комбинацией из 0 и 1 согласно таблице (А – 00000, Б – 00001, …, Я – 11111). Взяв день "Д" и номер месяца "М" своего рождения Саша вычислил $u_1 = Д^2 - М^2$, $u_2 = Д^2 \cdot М$, $u_3 = Д + М$. Далее Саша вычислил четвертое $u_4 = r_{32}(u_1 + u_2 u_3)$, пятое $u_5 = r_{32}(u_2 + u_3 u_4)$, …, n-ое число $u_n = r_{32}(u_{n-3} + u_{n-2} u_{n-1})$, где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. К i-му биту символу исходного сообщения (0 или 1) он прибавил число u_i и взял остаток от деления на 2. Полученную последовательность из 0 и 1 он вновь преобразовал в буквы по таблице и получил следующее сообщение: **ЖЮШЯЧМЖОЩКРХЮ**. Помогите Маше прочитать исходное слово, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

4. Звук записывается на магнитный слой барабана, который вращается с постоянной скоростью, совершая один оборот за 4 секунды. Рядом с барабаном по окружности через равные расстояния размещены записывающая (1) и три читающие головки (2), (3), (4). В каждый момент времени в телефонную линию передается сигнал с одной из читающих головок. Устройство спроектировано так, что каждый участок сигнала будет передан в линию один раз, а сама передача стартует, как только начало записи окажется у 3-й читающей головки. Сколько различных вариантов звука, переданного в линию, может получиться, если сообщение длилось 20 секунд?



5. Рассмотрим девять чисел $k_1, \dots, k_9$, где $k_i \epsilon \{0,1,2\}$. При этом хотя бы одно число k_i отлично от нуля. С помощью этих чисел вырабатывают последовательность $u_1, u_2, \dots, u_{2019}$ по формулам: $u_1 = k_1$, $u_2 = k_2$, ... , $u_{10} = k_{10}$, $u_{i+10} = r_3(u_i - u_{i+1})$, $i = 1,2, \dots ,2009$, где $r_3(a)$ – остаток от деления числа a на 3. Найдите такое наименьшее натуральное число l, что какие бы исходные числа $k_1, \dots, k_{10}$ мы ни взяли, в последовательности $u_1, u_2, \dots, u_l$ каждое из чисел 0, 1 и 2 гарантированно встретится хотя бы один раз.

6. Для зашифрования осмысленного 14-буквенного слова его буквы переводят в числа по таблице:

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Таким образом из исходного слова получается последовательность чисел $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{13}^{(0)}, x_{14}^{(0)}\right)$. Затем выбираются некоторые числа p, q и генерируются последовательности $x^{(1)}, \dots, x^{(28)}$ (также из 14 чисел) следующим образом:

$$x^{(i)} = \left(x_2^{(i-1)}, \dots, x_{13}^{(i-1)}, r_{32}\left(x_1^{(i-1)} + q \cdot x_{14}^{(i-1)}\right)\right), \text{при } i = 1, \dots, 14,$$

$$x^{(i)} = \left(x_2^{(i-1)}, \dots, x_{13}^{(i-1)}, r_{32}\left(x_1^{(i-1)} + p \cdot x_{14}^{(i-1)}\right)\right), \text{при } i = 15, \dots, 28,$$

где $r_{32}(a)$ – остаток от деления числа a на 32. Затем формируется последовательность $y_1, y_2, \dots, y_{13}, y_{14}$, где $y_i = x_{14}^{(2i-1)}, i = 1, \dots, 14$. В соответствии с вышеуказанной таблицей каждое y_i переводится в букву и полученное «слово» отправляется. Злоумышленнику удалось перехватить слово: **ЬЛГОЧЖГЩОШСССП**. Восстановите исходное слово, если известно, что $p = 25, q = 9$, и запишите его буквами в ВЕРХНЕМ регистре , то есть если у Вас получился ответ: **олимпиада**, то его следует записать, как **ОЛИМПИАДА**.

ОТВЕТЫ

9 КЛАСС

1) 57344.
2) 21.
3) ВЕЧЕРОМ.
4) ПОЙДЕМГУЛЯТЬ.
5) ВОДОХОД.
6) ВОСЬМИУГОЛЬНИК.

10 КЛАСС

1) 57344.
2) 21.
3) ВЕЧЕРОМ.
4) ПОЙДЕМГУЛЯТЬ.
5) ВОДОХОД.
6) ВОСЬМИУГОЛЬНИК.

11 КЛАСС

1) 26.
2) ГОНОРАР.
3) СРЕДАВЫХОДНОЙ.
4) 10946.
5) 29.
6) ВОСЬМИУГОЛЬНИК.